

Aufgaben: Zwei Quadrate Satz

1. Zeige, dass für eine Primzahl $\mathbb{N} \ni p \equiv 1 \pmod{4}$ die zwei ganzen Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ für welche $p = x^2 + y^2$ gilt bis auf Reihenfolge und Vorzeichen eindeutig bestimmt sind.

Hinweis: Betrachte $a^2(x^2 + y^2) - x^2(a^2 + b^2)$, wobei $p = a^2 + b^2$ eine andere Lösung ist.

2. Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $x, y \in \mathbb{Z}$ zwei ganze Zahlen, welche teilerfremd zu p sind. Nehme an, dass $p \mid x^2 - xy + y^2$ und folgere, dass entweder $p = 3$ oder $p \equiv 1 \pmod{6}$.

Hinweis: $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$.