Summen von Quadraten
Prüfung

Legi-Nr. (letzte 6 Ziffern): __________________________________

Bitte halten Sie Ihre Legi bereit und richten ihren Arbeitsplatz wie in den Student guidelines beschrieben ein. Lesen Sie die folgenden Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 80 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Wörterbücher
- Schreiben Sie in blau oder schwarz.
- Keine Bleistifte. Kein Tipp-Ex.
- Schreiben Sie ordentlich. Nicht eindeutig Lesbares wird ignoriert.
- Antworten Sie auf Deutsch oder Englisch.
- Die Aufgaben sind nach Themen geordnet. Dies entspricht nicht unbedingt der Schwierigkeit.
- Die meisten Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen Teilaufgaben oder unter Annahme jener lösbar. Es lohnt sich also jede Teilaufgabe anzuschauen.
- Maximalpunktzahl: 20 Punkte.
- Bitte unterschreiben Sie *nach* Prüfungsbegin die Eigenständigkeitserklärung auf der nächsten Seite.
- Teilen Sie allfällige Störungen während der Prüfung der Aufsicht mit.
- Die Disziplinarordnungen der ETH gelten für die Prüfung.

Alle Antworten müssen begründet werden.

Wenn Sie Aussagen aus der Vorlesung verwenden, machen Sie deutlich, worauf Sie sich beziehen.

Eigenständigkeitserklärung: Ich bestätige, die vorliegende Prüfung selbstständig verfasst zu haben und mich an die Vorgaben in den Student guidelines gehalten zu haben.

Unterschrift: ______________________________

Tabelle nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
Total		

Note	

Aufgabe 1: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ ungerade ganze Zahlen. Sei ferner $c \in \mathbb{Z}$ ein grösster gemeinsamer Teiler von a und b. Ist c notwendigerweise auch ein grösster gemeinsamer Teiler von $2a$ und $27a + 8b$?

[4 Punkte]

Aufgabe 2: Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ zwei Gauss'sche Zahlen.

(a) Nehme an, es gibt eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$, sodass $n \mid N(\alpha)$ und $n \mid N(\beta)$. Gibt es dann zwingend eine Gauss'sche Zahl γ, welche keine Einheit ist und ein gemeinsamer Teiler von α und β ist?

[1 Punkt]

(b) Bestimmen Sie alle natürlichen Primzahlen $p \in \mathbb{N}$, sodass folgendes gilt: Aus $p \mid N(\alpha)$ und $p \mid N(\beta)$ folgt, dass α und β nicht teilerfremd sind.

[3 Punkte]

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass es mindestens 24 verschiedene Hurwitz Quaternionen $\alpha \in \mathbb{Z}[i, j, k, \xi]$ mit Norm gleich 2021 gibt. Hier ist $\xi = (1 + i + j + k)/2$.

[4 Punkte]

Aufgabe 4: Sei $Q(X, Y) = 9X^2 + 13XY + 5Y^2 \in \mathbb{Z}[X, Y]$ eine binäre quadratische Form.

(a) Bestimmen Sie alle reduzierten binären quadratischen Formen mit ganzen Koeffizienten und Diskriminante gleich -11.

[2 Punkte]

(b) Bestimmen Sie eine reduzierte binäre quadratische Form $Q' \in \mathbb{Z}[X, Y]$, welche zu Q äquivalent ist.

[2 Punkte]

(c) Bestimmen Sie für die Primzahlen $p = 57, 79, 227$ ob -11 kongruent zu einem ganzen Quadrat modulo p ist.

[2 Punkte]

(d) Repräsentiert die Form Q die Zahlen 227 oder $57 \cdot 79$?

[2 Punkte]

Viel Glück!