

Aufgaben: Gauss'sche Zahlen

1. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ Gauss'sche Zahlen, sodass ihre Normen $N(\alpha), N(\beta) \in \mathbb{Z}$ teilerfremd sind (als ganze Zahlen). Zeige, dass α und β teilerfremd sind als Gauss'sche Zahlen.
2. Sei $\mathbb{N} \ni p \equiv 1 \pmod{4}$ eine ganze Primzahl und sei $x \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl, sodass $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ (Eine solche Zahl ist garantiert - siehe Vorlesung). Zeige, dass $x + i$ und p als Gauss'sche Zahlen nicht teilerfremd sind und folgere dass sich p als Summe von zwei ganzen Quadraten schreiben lässt.