Lokalisation und diskr. Evaluationsringe

Sei $A$ ein Intbereich.

Lokalisation und [illegible]

Sei $A$ ein Integritätsbereich.

Sei nun $S \subseteq A \setminus \{0\}$

(i) $1 \in S$

(ii) $\forall x, y \in S : x \cdot y \in S$.

Wir definieren wir eine Relation $\equiv$ auf $A \times S$

$(a,s) \equiv (b,t) \Leftrightarrow at = bs$.

<u>Prop</u>: $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation

<u>Bew</u>: Transitivität: Sei $(a,s) \equiv (b,t)$, $(b,t) \equiv (c,u)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} atu = bsu \\ \cancel{b}cts = bus \end{cases} \Rightarrow t(au - cs) = 0$

$\Rightarrow au = cs \Rightarrow (a,s) \equiv (c,u)$

qed.

Wir bezeichnen nun mit $\frac{a}{s}$ die Äquiv.klasse $(a,s)$ und mit $S^{-1}A$ die Menge aller Äquivalenzklassen.

Wir führen eine Ringstruktur auf $S^{-1}A$ ein:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}$$

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

Das Nullelement ist $\frac{0}{1}$, Das Einselement ist $\frac{1}{1}$.

Es gibt einen nat. Ringhomomorphismus:

$$A \to S^{-1}A$$
$$x \mapsto \frac{x}{1}.$$

In der Satz ist der Quotientenkörper ein Spezialfall. $S = A \setminus \{0\}$.

<u>Bsp</u>: Sei $f \in A \setminus \{0\}$ $S = \{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Schreiben wir für $S^{-1}A = A_f$.

<u>Bsp</u> Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $A$. Dann setze $S = A \setminus \mathfrak{p}$. Nichts ist der Quotientenkörper ein Spezialfall, denn wenn $A$ ein Integritätsbereich ist, ist $\{0\}$ ein Primideal. Wir sagen $S^{-1}A = A_{\mathfrak{p}}$

<u>Bsp</u>: $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}_{(\cdot)}$ . $\mathbb{Z}_{(p)} = \{ \frac{g}{h} \mid g, h \in \mathbb{Z}, p \nmid h \}$.

... $\{0\}$ ...

**Bsp:** $Q = \mathbb{Z}_{(0)}$. $\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{g}{h} \mid g,h \in \mathbb{Z}, p \nmid h\}$.

Wir können die obige Konstruktion auf $A$-Moduln erweitern

$\equiv$ auf $M \times S$: $(m,s) \equiv (m',s') \Leftrightarrow \exists t \in S: t(ms'-m's) = 0$

Wir bezeichnen wieder mit $\frac{m}{s}$ die Äquiv.klasse $(m,s)$ und mit $S^{-1}M$ die Menge aller Äq.klassen.

Addition: wie oben

Mult. $a \cdot \frac{m}{s} = \frac{am}{s}$

Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal, schreibe $M_{\mathfrak{p}} = S^{-1}M$.

Es gilt folgender Satz:

---

**Satz 2:** Die Primideale $\mathfrak{P}$ von $S^{-1}A$ stehen in 1:1 Korrespondenz mit den Primidealen $\mathfrak{q}$ von $A$, welche $S$ nicht schneiden.

$\mathfrak{q} \to S^{-1}\mathfrak{q} = \{\frac{q}{s} : q \in \mathfrak{q}, s \in S\}$,

$\mathfrak{P} \to \mathfrak{P} \cap A$.

**Bew:** $\mathfrak{P} = S^{-1}\mathfrak{q}$ ist ein Primideal.

Sei $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} \in \mathfrak{P} \Rightarrow \frac{ab}{st} = \frac{q}{u}$

$\Rightarrow \underbrace{abu}_{u \notin \mathfrak{q}} = \underbrace{qst}_{\in \mathfrak{q}} \Rightarrow a \in \mathfrak{q}$ oder $b \in \mathfrak{q}$

$\Rightarrow \frac{a}{s} \in \mathfrak{P}$ oder $\frac{b}{t} \in \mathfrak{P}$.

Ausserdem ist $\mathfrak{q} = \mathfrak{P} \cap A$. Wir müssen "$\supseteq$" zeigen.

Sei $a = \frac{q}{s} \Rightarrow as = q \in \mathfrak{q}$

$\Rightarrow a \in \mathfrak{q}$.

Sei $\mathfrak{P}$ ein bel. Primideal von $S^{-1}A$. $\mathfrak{q} = \mathfrak{P} \cap A$ ist ein Primideal, dies folgt, da $\mathfrak{q}$ dann das Urbild eines Primideals unter einem Ringhomomorph. ist.

$\mathfrak{q}$ schneidet $S$ nicht, denn sei $s \in \mathfrak{q}, s \in S$.

$s \cdot \frac{1}{s} = 1 \in \mathfrak{P}$.

$\mathfrak{P} = S^{-1}\mathfrak{q}$.

"$\subseteq$" Sei $\frac{a}{s} \in \mathfrak{P} \Rightarrow a = \frac{a}{s} s \in \mathfrak{P} \cap A$

$\Rightarrow a \in \mathfrak{q} \Rightarrow \frac{a}{s} \in S^{-1}\mathfrak{q}$. Also sind die Korrespondenzen zueinander invers und wir sind fertig. qed

---

**Def:** Ein Ring, welcher genau 1 maximales Ideal besitzt heißt lokaler Ring.

**Korollar:** Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal, dann ist $A_{\mathfrak{p}}$ ein lokaler Ring.

**Bew:** Die Primideale von $A_{\mathfrak{p}}$ sind in 1:1 Korrespondenz mit denjenigen, welche $S = A \setminus \mathfrak{p}$ schneiden, also jene welche in $\mathfrak{p}$ enthalten sind. Also ist dasjenige Primideal in $A_{\mathfrak{p}}$ welches mit $\mathfrak{p}$ korrespondiert das einzige maximale. qed

$S = A \setminus \mathfrak{p}$ schneidet, also jene welche in $\mathfrak{p}$ ...
in $A_\mathfrak{p}$ enthält und mit $\mathfrak{p}$ korrespondiert das einzig maximale qed

---

## Diskrete Evaluationsringe

<u>Def</u>: Ein diskreter Evaluationsring, auch diskreter Bewertungsring genannt ist ein Hauptidealring mit einem einzigen max. Ideal $\mathfrak{p} \neq 0$.

<u>Bsp</u>: Der Ring der formalen Potenzreihen $k[[X]]$ über einem Körper in einer Variable. Das einzige maximale Ideal ist $(X)$.

<u>Def</u>: Eine Primidealkette der Länge $n$ ist eine Kette von Primidealen

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2 \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$$

Die <u>Krull-Dimension</u> eines Ringes $A$ ist das Supremum aller Längen solcher Ketten in $A$.

<u>Prop</u>: Ein Hauptidealring hat Krull-Dimension 0 oder 1.

<u>Bew</u>: Nehme per Widerspruch an $\exists\, \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2$.
Sei $\mathfrak{p}_1 = (b)$, $b \neq 0$, $\mathfrak{p}_2 = (a)$, $b \in \mathfrak{p}_2$. Das bedeutet $\exists k : \underset{\notin \mathfrak{p}_1}{a} k = b$, da $\mathfrak{p}_1$ prim
folgt $k \in \mathfrak{p}_1$, also dann $\exists l : bl = k$
Dann $b = ak = alb$. Da wir in einem Int.bereich folgt
$al = 1 \Rightarrow (a) = (1)$ ↯. qed

<u>Bem</u>: Ein Int.bereich hat Krull-Dimension 0 gdw er ein Körper ist.
<u>Kor</u>: Die diskr. Evaluationsringe besitzen genau 2 Primideale.

Weitere Eigenschaften:
Sei das maximale Ideal $\mathfrak{p} = (\pi)$. In einem bel. Ring sind die Einheiten genau diejenigen Elemente, welche in keinem max'l Ideal enthalten sind, also hier sind es genau diejenigen, welche nicht in $\mathfrak{p}$ enthalten. Außerdem in einem HIR sind die Primideale genau durch die Primelemente erzeugt, also ist $\pi$ das einzige Primelement bis auf Assoziiertheit.
Also gilt $\forall a \in \mathfrak{o} \setminus \{0\} : a = \varepsilon \pi^n,\ n \geq 0,\ \varepsilon \in \mathfrak{o}^*$.
Im Quotientenkörper $K$ gilt: $\forall a \in K^* : \underline{a = \varepsilon \pi^n},\ n \in \mathbb{Z},\ \varepsilon \in \mathfrak{o}^*$. (*)
Daraus gilt insbesondere $\forall a \in K^* : a \in \mathfrak{o}$ oder $a^{-1} \in \mathfrak{o}$.

ein Quotientenkörper gilt: $\forall a \in K^\times$: $a \in \mathcal{O}$ ...

Bzw. gilt äquivalent $\forall a \in K^\times$: $a \in \mathcal{O}$ oder $a^{-1} \in \mathcal{O}$.

Def: Der Exponent in (*) heißt die Bewertung von $a$.

Die Bewertung können wir nun als Funktion $v: K^\times \to \mathbb{Z}$, $a \mapsto v(a)$ interpretieren und wir können sie auf ganz $K$ erweitern indem wir $v(0) = \infty$ setzen.

Es gilt: $(a) = \pi^{v(a)}$

Die Bewertung erfüllt die folgenden Gleichungen

(**) (ii) $v(ab) = v(a) + v(b)$ (iii) $v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$.

Def: Ein Ring heißt noethersch, wenn jede aufsteigende Folge von Idealen

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \dots \subseteq \mathfrak{a}_i \subseteq \dots$$

stationär wird, d.h. $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad \mathfrak{a}_{n_0} = \mathfrak{a}_n$.

Prop: Jeder HIR ist noethersch.

Bew: Sei $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \dots$ eine aufsteigende Folge von Idealen. Wir nehmen nun $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}_i$. Dies ist wieder ein Ideal. Da wir in einem HIR sind, gilt $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}_i = (b)$. Aber dann ist dieses $b$ in einem $\mathfrak{a}_{n_0}$ enthalten und damit sind alle die Vereinigung

qed.

Def: Seien $A \subseteq B$ Ringe, wir sagen $x \in B$ ist ganz über $A$, wenn $x$ die Nullstelle eines normierten Polynoms mit Koeff. in $A$ ist, d.h.

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0, \; a_i \in A, n \geq 1$$

Def: Die Menge $C = \{x \in B \mid x \text{ ist ganz über } A\}$ heißt der ganze Abschluss von $A$ in $B$.

Falls $C = A$ heißt $A$ ganz abgeschlossen in $B$

Fall $C = B$ heißt $B$ ganz über $A$

Def: Ein Int.ber. $A$, welcher in seinem Quot.körper ganz abgeschlossen ist, heißt normal

Satz: Sei $A$ ein Int.bereich.

(i) $A$ ist ein diskr. Bewertungsring.

(ii) $A$ ist ein noetherscher lokaler normaler Ring mit Krull-Dimension 1

Bew: (i) $\Rightarrow$ (ii) Wir haben schon: $A$ ist noethersch, lokal, mit Krull-Dimension.

Z.z.: $A$ ist normal.

Sei $K$ der Quot.körper von $A$.

$\forall a \in K^\times$: $a \in A$ oder $a^{-1} \in A$.

Sei nun $x \in K$ ganz über $A$, d.h.

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

Also sei $x^{-1} \in A$

$$x = -\underbrace{(a_1 + a_2 x^{-1} + \dots + a_n x^{1-n})}_{\in A}$$

qed.

Def: Eine surj. Funktion $v: K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ auf einem Körper $K$ heißt Exponentialbewertung / diskrete Bewertung

Satz: Sei $v$ eine Exponentialbewertung, ... Dann ist ...

**Def:** Eine surj. Funktion $v: K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ auf einem Körper $K$ heißt <u>Exponentialbewertung</u>, diskrete Bewertung oder nicht-archimedische Bewertung wenn gilt:

(i) $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $v(ab) = v(a) + v(b)$

(iii) $v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$

**Bem:** $v(1) = v(-1) = 0$, $\forall a \in K^*: v(a^{-1}) = -v(a)$

**Satz:** Sei $v$ eine Exponentialbewertung, $K$ ein Körper. Es ist

$\mathfrak{o} = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$

ist ein Ring mit Einheitengruppe

$\mathfrak{o}^* = \{x \in K \mid v(x) = 0\}$

die einzigen Ideale von $\mathfrak{o}$ sind

$\mathfrak{a} = \{x \in K \mid v(x) \geq d, d \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$

das einzige max. Ideal ist

$\mathfrak{p} = \{x \in K \mid v(x) > 0\}$

---

**Bew:** Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal. Wir können nun ein $x \in \mathfrak{a}$ bestimmen mit minimalem $v(x)$. Sei $x \neq 0$. Sei $v(x) = d$. Sei $y \in \mathfrak{o}$ mit $v(y) \geq d$.
Wir betrachten $y \cdot x^{-1}$. $v(y \cdot x^{-1}) = v(y) - v(x) \geq 0 \Rightarrow y \cdot x^{-1} \in \mathfrak{o}$.
Da nun $\mathfrak{a}$ abgeschlossen unter Multiplikation in $\mathfrak{o}$ ist, gilt $y = y \cdot x^{-1} \cdot x \in \mathfrak{a}$

qed.

---

**Bsp:** Sei $K = \mathbb{Q}$. Bemerke dass wir jedes $x \in \mathbb{Q}^*$ schreiben können als

$x = p^n \frac{a}{b}$, für eine Primzahl $p$ mit $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$, $p \nmid a, b$.

Setze nun: $v: \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Z}$, $p^n \frac{a}{b} \longmapsto n$.

Wir erweitern die Funktion auf $\mathbb{Q}$, indem wir $v(0) = \infty$ setzen.

$\mathfrak{o} = \{\frac{g}{h} \mid g, h \in \mathbb{Z}, p \nmid h\} = \mathbb{Z}_{(p)}$

---

Wenn wir Dedekindringe an einem Primideal $\mathfrak{p} \neq 0$ lokalisieren, dann bekommen wir ebenfalls einen diskreten Evaluationsring.

**Bsp:** $\mathbb{Z}_{(p)}$