LOKALISATION UND DISKRETE EVALUATIONSRINGE

FABIAN ROSHARDT

1. Lokalisation

Wir folgen hier den Referenzen [1] und [2].
Im gesamten Kapitel sei A ein Integritätsbereich.
Sei $S \subseteq A \backslash \{0\}$ so, dass:

(a) $1 \in S$
(b) $\forall x, y \in S : xy \in S$

Wir definieren nun eine Relation $\equiv$ auf $A \times S$ folgendermassen: $(a, s) \equiv (b, t) \iff at - bs = 0$

Proposition 1. *$\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation*

Beweis. Reflexivität und Symmetrie sind klar.

Transitivität: Sei $(a, s) \equiv (b, t) \wedge (b, t) \equiv (c, u) \implies at - bs = bu - ct = 0 \implies \begin{cases} aut = bsu \\ cst = bsu \end{cases}$
$\implies (au - cs)t = 0, t \in S \implies (a, s) \equiv (c, u)$ □

Wir bezeichnen nun mit $\frac{a}{s}$ die Äquivalenzklasse (a, s) und mit $S^{-1}A$ die Menge aller Äquivalenzklassen. Wir führen eine Ringstruktur auf $S^{-1}A$ folgendermassen ein:
$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+bs}{st}$
$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$
Das Nullelement ist $\frac{0}{1}$, das Einselement $\frac{1}{1}$

Dies erinnert an die Konstruktion des Quotientenkörpers über einem Integritätsbereich. Der Beweis, dass die oben definierte Struktur tatsächlich ein Ring ist, ist analog zum Beweis beim Quotientenkörper. Ausserdem existiert wie beim Quotientenkörper ein Ringhomomorphismus, $f : A \to S^{-1}A, x \mapsto \frac{x}{1}$

In der Tat ist der Quotientenkörper ein Spezialfall der obigen Konstruktion, wähle $S = A \backslash \{0\}$

Beispiel 2. *$f \in A \backslash \{0\}, S = \{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, schreibe $S^{-1}A = A_f$*

Beispiel 3. *Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A. Setze $S = A \backslash \mathfrak{p}$. Schreibe $A_\mathfrak{p}$ für $S^{-1}A$. Bemerke, dass der Quotientenkörper ein Spezialfall dieses Beispiels ist, denn falls A ein Integritätsbereich ist, so ist $\{0\}$ ein Primideal.*

Diese Ringe $A_\mathfrak{p}$ sind der wahrscheinlich wichtigste Fall und wir werden sie im Folgenden noch genauer untersuchen.

Beispiel 4. *Sei $A = \mathbb{Z}, \mathfrak{p} = (p), \mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{g}{h} | g, h \in \mathbb{Z}, p \nmid h\}$*

Ausserdem können wir die obige Konstruktion auf A-Module M erweitern. Sei wieder S wie oben. Definiere $\equiv$ auf $M \times S : (m, s) \equiv (m', s') \iff \exists t \in S : t(sm' - s'm) = 0$. Bezeichne mit $\frac{m}{s}$ eine Äquivalenzklasse und mit $S^{-1}M$ die Menge aller Äquivalenzklassen, $S^{-1}M$ ist wieder ein A-Modul. Die Addition ist wieder die gleiche wie oben, Multiplikation mit einem Ringelement ist gegeben durch:
$a \cdot \frac{m}{s} = \frac{am}{s}$
und falls $S = A \backslash \mathfrak{p}$ schreiben wir $M_\mathfrak{p}$ für $S^{-1}M$. Nun beweisen wir noch folgenden Satz:

Satz 5. *Die Primideale $\mathfrak{Q}$ von $S^{-1}A$ stehen in $1-1$ Korrespondenz mit den Primidealen $\mathfrak{q}$ von A, welche S nicht schneiden: $\mathfrak{q} \mapsto S^{-1}\mathfrak{q} = \{\frac{q}{s} | q \in \mathfrak{q}, s \in S\}, \mathfrak{Q} \mapsto \mathfrak{Q} \cap A$*

Beweis. Zuerst beweisen wir: $\mathfrak{Q} = S^{-1}q$ ist ein Primideal von $S^{-1}A$. Sei $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{q}{u} \in \mathfrak{Q} \implies abu - stq = 0 \implies abu \in \mathfrak{q}$, aber $u \in S$, also nicht in $\mathfrak{q}$, also $(a \in \mathfrak{q} \vee b \in \mathfrak{q}) \implies (\frac{a}{s} \in \mathfrak{Q} \vee \frac{b}{t} \in \mathfrak{Q})$.

Also $\mathfrak{Q}$ prim. Ausserdem gilt: $\mathfrak{q} = \mathfrak{Q} \cap A$. Denn: $\frac{q}{s} = a \implies q = sa$ aber wieder ist $s \notin \mathfrak{q}$, also $a \in \mathfrak{q}$

Sei nun $\mathfrak{Q}$ ein beliebiges Primideal von $S^{-1}A$. $\mathfrak{q} = \mathfrak{Q} \cap A$ ist ein Primideal von A, da es das Urbild eines Primideals unter einem Ringhomomorphismus ist. Ausserdem gilt: $\mathfrak{q}$ schneidet S nicht, denn sonst: Sei $s \in \mathfrak{q} \cap S \implies s \cdot \frac{1}{s} = 1 \in \mathfrak{Q}$, Widerspruch. Ausserdem gilt: $\mathfrak{Q} = S^{-1}\mathfrak{q}$, denn: $\frac{a}{s} \in \mathfrak{Q} \implies a = s\frac{a}{s} \in \mathfrak{Q} \cap A = \mathfrak{q} \implies \frac{a}{s} \in S^{-1}\mathfrak{q}$. Also sind die oben gegebenen Abbildungen zueinander invers und wir sind fertig. □

Definition 6. *Ein Ring, welcher genau ein maximales Ideal besitzt, heisst **lokaler Ring**.*

Korollar 7. *Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal, dann ist $A_\mathfrak{p}$ ein lokaler Ring*

Beweis. Die Primideale von $A_\mathfrak{p}$ entsprechen den Primidealen, welche nicht $S = A \backslash \mathfrak{p}$ schneiden, also in $\mathfrak{p}$ enthalten sind. Also ist das Primideal in $A_\mathfrak{p}$, welches mit $\mathfrak{p}$ korrespondiert, das einzig maximale. □

2. Diskrete Evaluationsringe

Definition 8. *Ein **diskreter Bewertungsring**, auch **diskreter Evaluationsring** genannt, ist ein Hauptidealring $\mathfrak{o}$ mit einem einzigen maximalen Ideal $\mathfrak{p} \neq 0$*

Beispiel 9. *Der Ring der formalen Potenzreihen, $k[[X]]$, in einer Variable. Das einzige maximale Ideal ist (X).*

Beispiel 10. *Der Ring $\mathbb{Z}_p$ der ganzen p-adischen Zahlen. Für weitere Information siehe [3]*

Definition 11. *Eine Primidealkette der Länge n ist eine Kette von Primidealen*

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \mathfrak{p}_n \tag{2.1}$$

*Die **Krull-Dimension** eines Ringes A ist das Supremum aller Längen solcher Ketten in A.*

Proposition 12. *Ein Hauptidealring hat Krull-Dimension 0 oder 1.*

Beweis. Nehme per Widerspruch an $\exists \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2$, da wir einen Hauptidealring haben sei $\mathfrak{p}_1 = (a), a \neq 0, \mathfrak{p}_2 = (b)$. Dann haben wir: $a \in \mathfrak{p}_2$, also $b \cdot k = a$, aber $\mathfrak{p}_1$ ist ein Primideal, also folgt $k \in (a)$, also $k = c \cdot a$. Aber dann folgt $a = kb = a \cdot c \cdot b$, also wäre b eine Einheit, Widerspruch. □

Bemerkung 13. Ein Integritätsbereich hat Krull-Dimension 0 genau dann wenn er ein Körper ist.

Korollar 14. *Ein diskreter Evaluationsring besitzt genau 2 Primideale.*

Wir schauen uns nun ein paar weitere Eigenschaften eines diskreten Evaluationsrings an. Sei das maximale Ideal $\mathfrak{p}$ durch ein Primelement π erzeugt, d.h. $(\pi) = \mathfrak{p}$. Da in einem beliebigen Ring jedes Element, welches in keinem maximalen Ideal enthalten ist, eine Einheit ist, bedeutet dies insbesondere hier: Jedes Element, welches nicht in $\mathfrak{p}$ liegt, ist eine Einheit. Nach Korollar 14 ist $\mathfrak{p}$ das einzige Primideal abgesehen von $\{0\}$, also ist π bis auf Assoziiertheit das einzige Primelement. Daher folgt: $\forall a \in \mathfrak{o} - \{0\} : \exists \epsilon \in \mathfrak{o}^* : a = \epsilon\pi^n, n \geqslant 0$. Allgemeiner: Im Quotientenkörper K gilt:

$$\forall a \in K^* : \exists \epsilon \in \mathfrak{o}^* : a = \epsilon\pi^n, n \in \mathbb{Z} \tag{2.2}$$

Bemerkung 15. Es gilt insbesondere, $\forall a \in K^* : a \in \mathfrak{o}$ oder $a^{-1} \in \mathfrak{o}$

Definition 16. *Der Exponent n in 2.2 heisst die **Bewertung** von a.*

Wir können die Bewertung als eine Funktion: $v : K^* \to \mathbb{Z}$ interpretieren. Wie können sie auf ganz K erweitern, indem wir $v(0) = \infty$ setzen. Es gilt: $(a) = \mathfrak{p}^{v(a)}$. Ausserdem gelten folgende Gleichungen:

$$(ii) \quad v(ab) = v(a) + v(b), \quad (iii) \quad v(a+b) \geqslant \min\{v(a), v(b)\} \tag{2.3}$$

Definition 17. *Ein Ring heisst **noethersch**, wenn jede aufsteigende Folge von Idealen*

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{a}_i \dots \tag{2.4}$$

stationär wird, d.h. $\exists n_0$ so, dass $\forall n \geqslant n_0 : \mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{n_0}$

Satz 18. *Jeder Hauptidealring ist noethersch*

Beweis. Sei $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \dots$ eine aufsteigende Folge von Idealen. Wir nehmen $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}_i$, dies ist wieder ein Ideal. Da wir in einem Hauptidealring sind, ist es durch ein Element erzeugt, sagen wir $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}_i = (b)$, nun $\exists n_0$ so, dass $b \in \mathfrak{a}_{n_0}$ und wir sind fertig. □

Wir möchten nun eine äquivalente Charakterisierung eines diskreten Evaluationsrings sehen, dafür müssen wir noch gewisse Definitionen einführen.

Definition 19. *Seien $A \subseteq B$ Ringe, wir sagen $x \in B$ ist **ganz** über A, falls x eine Nullstelle eines monischen Polynoms mit Koeffizienten in A ist, d.h.*

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad a_i \in A, n \geqslant 1 \tag{2.5}$$

Definition 20. *Die Menge $C = \{x \in B | x \text{ ist ganz über } A\}$ heisst der **ganze Abschluss** von A in B.*
*Falls $C = A$ heisst A **ganz abgeschlossen** in B.*
*Falls $C = B$ heisst B **ganz** über A.*

Definition 21. *Ein Integritätsbereich A, welcher in seinem Quotientenkörper ganz abgeschlossen ist, heisst **normal**.*

Beispiel 22. *Die Ringe $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}[i]$ sind beide normal.*

Beispiel 23. *Die Ringe $\mathbb{Z}[di], d > 1$ sind nicht normal, denn i liegt im Quotientenkörper und nicht in $\mathbb{Z}[di]$, ist aber ganz über $\mathbb{Z}[di]$*

Wir beweisen nun einen Teil des folgende Satzes:

Satz 24. *Sei A ein Integritätsbereich. Folgende Aussagen sind äquivalent:*
(i) A ist ein diskreter Evaluationsring
(ii) A ist ein normaler noetherscher lokaler Ring mit Krull-Dimension 1.

Beweis. $(i) \implies (ii)$ Laut 18 und 12 zusammen mit 13 reicht es zu zeigen: A ist normal. Sei also K der Quotientenkörper von A. Sei $x \in K \backslash \{0\}$ so, dass $x^n + a_1 x^{n-1} \dots a_n = 0$, Laut 15 gilt $x \in A$ oder $x^{-1} \in A$. Im ersten Fall sind wir fertig, im zweiten gilt: $x = -(a_1 + a_2 x^{-1} + \cdots + a_n x^{1-n})$, also ebenfalls $x \in A$

Die andere Richtung werden wir hier nicht beweisen, denn hierzu bräuchten wir noch etwas mehr Theorie zur Ganzheit. Der Beweis findet sich in [2]. □

Wir können auch umgekehrt mit einer sogenannten Exponentialbewertung auf einem Körper starten und davon ausgehend einen diskreten Evaluationsring als Unterring dieses Körpers finden.

Definition 25. *Eine surjektive Funktion $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ auf einem Körper K mit den Eigenschaften (ii) und (iii) aus 2.3 zusammen mit:*
(i) $v(x) = \infty \iff x = 0$
*heisst eine **Exponentialbewertung, diskrete Bewertung** oder **nicht-archimedische Bewertung**.*

Bemerkung 26. $v(1) = v(-1) = 0, \forall x \in K^* : v(x^{-1}) = -v(x)$

Es folgt aus den Bedingungen direkt folgender Satz:

Satz 27. *Sei v eine Exponentialbewertung, K ein Körper. Es ist*
$\mathfrak{o} = \{x \in K | v(x) \geqslant 0\}$
ein Ring mit der Einheitengruppe
$\mathfrak{o}^* = \{x \in K | v(x) = 0\}$
die einzigen Ideale von $\mathfrak{o}$ sind von der Form
$\mathfrak{a} = \{x \in K | v(x) \geqslant d, d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\}$
und das einzige maximale Ideal ist
$\mathfrak{p} = \{x \in K | v(x) > 0\}$

Beispiel 28. *Sei $K = \mathbb{Q}$, sei p eine Primzahl. Jedes $x \in Q^*$ kann eindeutig geschrieben werden als: $x = p^n \cdot \frac{a}{b}$ so, dass $ggt(a, b) = 1, p \nmid a, b$. Dann ist: $v : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Z}, p^n \frac{a}{b} \mapsto n$ eine Exponentialbewertung, wenn wir $v(0) = \infty$ setzen, und es gilt: $\mathfrak{o} = \{x \in K | v(x) \geqslant 0\} = \mathbb{Z}_{(p)}$*

Wir geben nun eine letzte Konstruktion von diskreten Evaluationsringen an; Falls wir einen sogenannten Dedekindring (siehe später in der Vorlesung) an einem Primideal $\mathfrak{p} \neq \{0\}$ lokalisieren, ist der enstehende Ring ein diskreter Evaluationsring.

Beispiel 29. $\mathbb{Z}_{(p)}$

References

[1] J.Neukirch, Algebraische Zahlentheorie, Springer-Verlag, Berlin,1992
[2] M. F. Atiyah und I. G. Macdonald, Introduction to commutative algebra. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 196
[3] Gouvêa F.Q. p-adic Numbers. Universitext. Springer, Cham, 2020

Email address: fabiaros@student.ethz.ch