DIRICHLET L-FUNKTIONEN UND DICHTIGKEITSSÄTZE

LARA IMHOF

In diesem Abschnitt betrachten wir die Riemannsche und Dedekindsche Zetafunktion anhand einiger Beispiele. Dann führen wir die Begriffe des Dirichletschen-Charakter und der Dirichletschen L-Funktion ein. Wir stellen fest, dass sich unter gewissen Voraussetzungen die Dedekindsche Zetafunktion zu einem Produkt aus Dirichletschen L-Funktionen und der Riemannschen Zetafunktion faktorisieren lässt. Danach überprüfen wir die Dirichletschte Klassenzahlformel anhand zweier Beispiele. Abschliessend führen wir zwei Dichtigkeitsbegriffe ein, welche wir für den Dirichletschen Primzahlsatz und den Chebotarev's Dichtigkeitssatz benötigen. Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die oben genannten Themen. Diese werden in Anwendungen demonstriert, weswegen die meisten Behauptungen in diesem Kapitel nicht bewiesen werden. Für jeden Beweis ist jeweils eine Referenz angegeben, falls der Leser den Beweis nachschlagen möchte.
Wir folgen *Algebraische Zahlentheorie* von J. Neukirch [1] und *Einführung in die algebraische Zahlentheorie* von A. Schmidt [2].

1. Die Riemannsche und Dedekindsche Zetafunktion

In diesem Unterkapitel führen wir die Begriffe der Riemannschen Zetafunktion und der Dedekindschen Zetafunktion ein. Die Zetafunktion eines Zahlkörpers ist eine analytische Funktion, in welcher viele der arithmetischen Eigenschaften des Zahlkörpers enthalten sind. Die Zetafunktion ist auch von zentraler Bedeutung im Beweis des Dirichletschen Primzahlsatzes 31, welcher besagt, dass eine arithmetische Folge unendlich viele Primzahlen besitzt.

Wir beginnen mit dem Beweis der Konvergenz der Reihe (1.1).

Lemma 1. *Falls $s > 1$ reell, so konvergiert die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \textit{absolut.} \tag{1.1}$$

Für den Beweis von Lemma 1 und Theorem 2 folgen wir der Argumentation in [2].

Beweis. Aus der Analysis wissen wir, dass

$$0 \ < \ \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\, \mathrm{d}x \ < \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \ < \ 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\, \mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

Aus dem Integralkriterium für Reihen folgt, dass die Reihe konvergiert genau dann, wenn das Integral auf der rechten Seite existiert, beziehungsweise einen endlichen Wert besitzt. Da $s > 1$ gilt für $N \geqslant 2$,

$$\int_1^{N} \frac{1}{x^s}\, \mathrm{d}x = \frac{N^{1-s} - 1}{1 - s}. \tag{1.3}$$

Für $N \to \infty$ strebt $N^{1-s} \to 0$, da $s > 1$. Daher gilt,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^s}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \lim_{N\to\infty} \int_1^{N} \frac{1}{x^s}\, \mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{s-1} < \infty \tag{1.4}$$

und die Behauptung folgt. □

Aus dem obigen Lemma folgt folgendes Theorem über die Riemannsche Zetafunktion.

Theorem 2. *Sei $s \in \mathbb{C}$. Falls $\mathrm{Re}(s) > 1$, so konvergiert die Reihe*

$$\zeta(s) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{1.5}$$

absolut. Des Weiteren ist die Abbildung $s \mapsto \zeta(s)$ *auf* $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 1\}$ *holomorph. Diese Abbildung wird **Riemannsche Zetafunktion** genannt, benannt nach dem deutschen Mathematiker BERNHARD RIEMANN.*

Beweis. Sei $\delta > 0$ Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) \geqslant 1 + \delta$ gilt

$$|n^s| = |\exp(s\ \log(n))| = \exp(\operatorname{Re}(s)\ \log(n)) = n^{\operatorname{Re}(s)}. \tag{1.6}$$

Somit können wir die Summe folgendermassen umschreiben

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^s}\right| \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(s)}} \;\leqslant\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}. \tag{1.7}$$

Da $1 + \delta > 1$ reell können wir Lemma 1 anwenden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}} \;<\; \infty. \tag{1.8}$$

Mittels Majorantenkriterium folgt die absolute Konvergenz von (1.5).

Sei α sodass $\operatorname{Re}(s) > \alpha > 1$ beliebig. Definiere $D_\alpha = s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(s) > \alpha$. Sei $N \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\sup_{s \in D_\alpha} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \right| = \sup_{s \in D_\alpha} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right| \leqslant \sup_{s \in D_\alpha} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \to 0 \tag{1.9}$$

falls $N \to \infty$. Dies ergibt lokal gleichmässige Konvergenz. Mittels Weierstrasschem Konvergenzsatz folgt, dass die Abbildung $s \mapsto \zeta(s)$ auf $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 1\}$ holomorph ist. □

Bemerkung 3. Für $s = 2$ beschreibt die Riemannsche Zetafunktion das Basler Problem, benannt nach den Basler Mathematikern LEONHARD EULER, den Brüdern JAKOB I und JOHANN I BERNOULLI. Ferner gilt

$$\zeta(2) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \;=\; \frac{\pi^2}{6}. \tag{1.10}$$

Wir können die Riemannsche Zetafunktion zu einer meromorphen Funktion auf einen grösseren Definitionsbereich ausdehnen.

Theorem 4. *Die Riemannsche Zetafunktion ist eindeutig zu einer holomorphen Funktion auf* $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ *fortsetzbar, und sie besitzt einen einfachen Pol bei* $s = 1$ *mit Residuum* 1.

Für einen Beweis siehe *Algebraische Zahlentheorie* Kapitel VII.1.

Zusätzlich können wir die Riemannsche Zetafunktion als unendliches Produkt darstellen.

Theorem 5. (Euler-Identität). Für $\operatorname{Re}(s) > 1$ gilt

$$\zeta(s) = \prod_{\text{p ist Primzahl}} \frac{1}{1 - p^{-s}}. \tag{1.11}$$

Für einen Beweis der Euler-Identität siehe Kapitel VII.1 in *Algebraische Zahlentheorie* [1].

Aus der Produktdarstellung (1.11) folgt, dass die Riemannsche Zetafunktion keine Nullstellen für $\operatorname{Re}(s) > 1$ besitzt. Wir nennen die Nullstellen von der Form $-2n$ für $n \in \mathbb{N}$ die trivialen Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion. Da die trivialen Nullstellen negative Realteil haben, folgt, dass die nicht trivialen Nullstellen sich im kritischen Streifen $0 \leqslant \operatorname{Re}(s) \leqslant 1$ befinden. Die **Riemannsche Vermutung** besagt, dass alle nichttrivialen Nullstellen von der Zetafunktion Realteil $\frac{1}{2}$ besitzen. Die Riemannsche Vermutung ist für die Kryptologie von Bedeutung, beispielsweise im RSA-Verfahren. Die Vermutung wurde bis heute noch nicht bewiesen und ist eines der Millenium-Probleme.

Als nächstes definieren wir die Dedekindsche Zetafunktion, welche eine Verallgemeinerung der Riemannschen Zetafunktion ist, da wir sie auf jedem Zahlkörper K definieren können. Gilt $K = \mathbb{Q}$, so erhalten wir die Riemannsche Zetafunktion.

Sei nun K ein Zahlkörper und s eine komplexe Zahl. Falls $\mathrm{Re}(s) > 1$, so konvergiert die Reihe

$$\zeta_K(s) \;=\; \sum_{\mathfrak{a}\subset\mathcal{O}_K} \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s} \tag{1.12}$$

absolut, wobei $\mathfrak{a} \neq 0$ ein ganzes Ideal von $\mathcal{O}_K$ ist. Hier ist $\mathfrak{N}$ die Absolutnorm, welche definiert ist als

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) = [\mathcal{O}_K : \mathfrak{a}] \tag{1.13}$$

für Ideale $\mathfrak{a} \neq 0$. Wir nennen die Abbildung $s \mapsto \zeta_K(s)$ die **Dedekindsche Zetafunktion**, benannt nach dem deutschen Mathematiker RICHARD DEDEKIND. Des Weiteren folgt aus der eindeutigen Zerlegung in Primideale, Satz 13 vom Vortrag über die Geometrie der Zahlen, dass die Dedekindsche Zetafunktion folgende Produktdarstellung besitzt:

$$\zeta_K(s) \;=\; \prod_{\mathfrak{p}\subset\mathcal{O}_K} \frac{1}{1-\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-s}}, \tag{1.14}$$

wobei das Produkt über alle Primideale $\mathfrak{p}$ von $\mathcal{O}_K$ geht.

Analog zur Riemannsche Zetafunktion können die Dedekindsche Zetafunktion zu einer meromorphen Funktion auf einen grösseren Definitionsbereich ausdehnen.

Theorem 6. *Die Dedekindsche Zetafunktion ist eindeutig zu einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ fortsetzbar, und sie besitzt einen einfachen Pol bei $s = 1$.*

Für die Dedekindsche Zetafunktion besagt die **verallgemeinerte Riemannsche Vermutung**, dass alle Nullsteslen von $\zeta_K(s)$, die im kritischen Streifen $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ liegen, Realteil $\frac{1}{2}$ haben.

Für ein Beispiel einer Dedekindschen Zetafunktion siehe Beispiel 25. Um dieses Beispiel zu verstehen, müssen wir zuerst noch zwei Begriffe einführen: den Dirichlet-Charakter und die Dirichletsche L-Funktion.

2. Dirichlet-Charaktere

In diesem Unterkapitel führen wir den Dirichlet-Charakter ein. Ferner betrachten wir primitive Charaktere und den Führer eines Dirichlet-Charakters modulo n anhand einiger Beispiele.

Wir beginnen mit einer kurzen Repetition des Begriffes des Gruppenhomomorphismus.

Definition 7. *Seien $(G,\ \circ_G)$, und $(H,\ \circ_H)$ eine Gruppe. Dann nennen wir die Abbildung $f : G \mapsto H$ einen **Gruppenhomomorphismus**, falls*

$$f(g_1\ \circ_G\ g_2) \;=\; f(g_1)\ \circ_H\ f(g_2),\ \forall g_1, g_2 \in G. \tag{2.1}$$

Wir beginnen mit den notwendigen Definitionen, die wir in den darauffolgenden Kapiteln brauchen werden.

Definition 8. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein **Dirichlet-Charakter modulo** $\mathbf{n}$ ist ein Gruppenhomomorphismus*

$$\chi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}. \tag{2.2}$$

Der Dirichlet-Charakter ist benannt nach dem deutschen Mathematiker PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET, welcher dem Gebiet der Zahlentheorie und der Analysis sehr viel beigetragen hat, wie zum Beispiel das bekannte Schubfachprinzip.

Wir bezeichnen mit dem trivialen Dirichlet-Charakter χ_0 modulo n, den Charakter, der konstant eins ist. Der triviale Charakter modulo 1 wird auch Hauptcharakter genannt.

Definition 9. *Wir sagen, dass ein Dirichlet-Charakter χ modulo n von einem Dirichlet-Charaktern χ' modulo m induziert wird, falls m ein Teiler von n ist und wir χ als Komposition aus χ' wie folgt schreiben können*

$$\chi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\chi'} \mathbb{S}^1. \tag{2.3}$$

*Wir nennen einen Dirichlet-Charakter χ modulo n **primitiv**, falls kein $m \in \mathbb{N}$ echter Teiler von n existiert, sodass χ von einem Dirichlet-Charkater modulo m induziert wird.*

Definition 10. *Sei χ ein Dirichlet-Charakter modulo n. Wir nennen den kleinsten Teiler f von n den* ***Führer*** *von χ, falls χ von einem Dirichlet-Charakter modulo f induziert wird.*

Wir können also jeden Dirichlet-Charakter χ modulo n durch einen primitiven Charakter χ' modulo f wie folgt induzieren:

$$\chi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\chi'} \mathbb{S}^1. \tag{2.4}$$

Des weiteren, gilt, falls $f = n$, dann ist χ primitiv.

Als nächstes geben wir einige Beispiele, um diese abstrakte Begriffe fassbarer zu machen und zu festigen.

Beispiel 11. *(1) Sei $\chi_3(\bar{1}) = 1$ und $\chi_3(\bar{2}) = -1$. Dann definiert χ ein Dirichlet-Charakter modulo 3. Da 3 keine echte Teiler hat, folgt, dass dieser Dirichlet-Charakter primitv ist, und Führer $f = 3$ besitzt.*

(2) Sei $\chi_4(\bar{1}) = 1$ und $\chi_4(\bar{3}) = -1$. Dann definiert χ_4 ein Dirichlet-Charakter modulo 4. Der Führer von χ_4 ist 4, daher ist χ_4 primitiv. Des Weiteren gilt $\chi_4^2 = \chi_0$.

(3) Sei $\chi_6(\bar{1}) = 1$ und $\chi_6(\bar{5}) = -1$. Dann definiert χ_6 ein Dirichlet-Charakter modulo 6. Der Führer von χ_6 ist 3, daher ist χ nicht primitiv.

(4) Sei p eine ungerade Primzahl. Dann definiert $\chi(\bar{a}) = \left(\frac{\bar{a}}{p}\right)$ ein Dirichlet-Charakter modulo p, wobei

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } a \equiv 0 \mod p \\ +1 & \text{falls } a \equiv b^2 \mod p, \text{ wobei } b \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.5}$$

das Legendre-Symbol, welches im zweiten Vortrag definiert wurde. Aus der Definition des Legendre-Symbols folgt, dass χ die Werte 0 und ± 1 annimmt, daher folgt, dass $\chi(\bar{a}) \in \mathbb{S}^1$ für alle $\bar{a} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$. Aus dem Korollar 2.5 zum Eulerschen Kriterium folgt, dass χ ein Gruppenhomomorphismus ist, da für alle $\bar{a}, \bar{b} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$

$$\chi(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \left(\frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{p}\right) = \left(\frac{\bar{a}}{p}\right) \cdot \left(\frac{\bar{b}}{p}\right) = \chi(\bar{a}) \cdot \chi(\bar{b}). \tag{2.6}$$

Da p eine Primzahl, gilt $f = p$ und der Dirichlet-Charakter ist daher primitiv.

(5) Es gilt: Ein Dirichlet-Charakter besitzt Führer 1 genau dann wenn es der triviale Charakter ist.

Wir definieren die Multiplikation

$$\chi\psi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{S}^1, \ (\chi\psi)(\bar{m}) = \chi(\bar{m})\psi(\bar{m}) \tag{2.7}$$

auf der Menge der Dirichlet-Charakter modulo n. Mit dieser Multiplikation und dem trivialen Charakter χ_0 als neutrales Element bildet die Menge der Dirichlet-Charaktere modulo n eine abelsche Gruppe.

Wir können eine Dirichlet-Charakter χ modulo n zu einer Funktion auf ganz $\mathbb{Z}$ ausweiten. Wir definieren $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ durch

$$\chi(m) = \begin{cases} \chi(m \mod n) & \mathrm{ggT}(n, \ m) = 1 \\ 0 & \mathrm{ggT}(n, \ m) \neq 1. \end{cases} \tag{2.8}$$

Eine weitere Variante wäre χ zunächst als Funktion auf $(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^\times$ aufzufassen und $\chi(m) = 0$ zu setzen für jedes $m \in \mathbb{Z}$ für das gilt $\mathrm{ggT}(m, \ f) \neq 1$.

Den Dirichlet-Charakter, den wir in Beispiel 11 *(4)* gesehen haben, werden wir nun wie oben beschrieben auf ganz $\mathbb{Z}$ ausweiten.

Beispiel 12. *Sei p eine ungerade Primzahl. Dann definiert $\chi(\bar{a}) = \left(\frac{\bar{a}}{p}\right)$ ein Dirichlet-Charakter modulo p. Diesen können wir wie oben beschrieben zu $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ erweitern*

$$\chi(a) \;=\; \begin{cases} \chi(a \mod p) & \mathrm{ggT}(p,\ a) = 1 \\ 0 & \mathrm{ggT}(p,\ a) \neq 1 \end{cases} \;=\; \left(\frac{a}{p}\right) \tag{2.9}$$

Das Legendre-Symbol definiert also einen Dirichlet-Charakter auf ganz $\mathbb{Z}$.

Wir können das Legendre-Symbol mittels Dirichlet-Charakter modulo n für $n \in \mathbb{N}$ ungerade zum Jacobi-Symbol wie folgt verallgemeinern:

$$\left(\frac{a}{n}\right) \;=\; \begin{cases} \chi(a \mod n) & \mathrm{ggT}(n,\ a) = 1 \\ 0 & \mathrm{ggT}(n,\ a) \neq 1. \end{cases} \tag{2.10}$$

Dies können wir noch weiter für $n \in \mathbb{Z}$ gerade verallgemeinern, indem wir

$$\left(\frac{a}{2}\right) \;=\; \begin{cases} -1 & \text{falls } a \equiv 3, 5 \bmod 8 \\ 0 & \text{falls } a \equiv 1, 7 \bmod 8 \\ 1 & \text{falls } a \equiv 0 \bmod 2, \end{cases} \tag{2.11}$$

$$\left(\frac{a}{-1}\right) \;=\; \begin{cases} -1 & \text{falls } a < 0 \\ 1 & \text{falls } a \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

und

$$\left(\frac{a}{0}\right) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } a = \pm 1 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} \tag{2.13}$$

setzen. Alle anderen Werte ergeben sich durch folgende Rechenregel:

$$\left(\frac{a \cdot b}{c \cdot d}\right) \;=\; \left(\frac{a}{c}\right) \cdot \left(\frac{b}{c}\right) \cdot \left(\frac{a}{d}\right) \cdot \left(\frac{b}{d}\right). \tag{2.14}$$

Wir nennen dies das Kronecker-Symbol.

Sei a eine quadratfreie Zahl in $\mathbb{Z}\backslash\{0, 1\}$. Quadratfrei bedeutet, dass in der Primfaktorzerlegung von a jede Primzahl höchstens einmal auftritt. Für einen quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$ ist der Dirichlet-Charakter von der Form $\left(\frac{d}{\cdot}\right)$, wobei d die Diskriminante ist. Die Diskriminante ist gegeben durch

$$d = \begin{cases} a & \text{falls } a \equiv 1 \bmod 4 \\ 4a & \text{falls } a \equiv 2 \text{ oder } 3 \bmod 4. \end{cases} \tag{2.15}$$

Beispiel 13. *Sei $a = -1$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{a}) = \mathbb{Q}(i)$ ein quadratischer Zahlkörper. Da $a \equiv 3 \bmod 4$ ist die Diskriminante $d = 4a = -4$. Es gilt: $\chi_4(n) = \left(\frac{-4}{n}\right)$.*

3. Dirichlet L-Funktionen

In diesem Unterkapitel wird die Dirichletsche L-Reihe und die Dirichletsche L-Funktion eingeführt. Die Begriffe werden mittels einiger Beispiele erläutert. Des Weiteren finden wir die Darstellung der Dedekindschen Zetafunktion für den Körper $K = \mathbb{Q}(\xi_n)$, wobei ξ_n die n-te Einheitzwurzel ist, in Abhängigkeit der L-Funktionen. Zudem wird in diesem Abschnitt eine Darstellung der Dedekindschen Zetafunktion eines quadratischen Zahlkörpers in Abhängigkeit der Dirichletschen L-Funktion präsentiert. Wir werden die Korrektheit dieser Darstellung anhand des Beispiels $\mathbb{Q}(i)$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ zeigen. Anschliessend überprüfen wir die Dirichletschte Klassenzahlformel für $\mathbb{Q}(i)$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.

Wir können für einen Dirichlet-Charakter auf den ganzen Zahlen folgende Reihe bilden.

Definition 14. *Die **Dirichletsche L-Reihe** ist definiert durch*

$$L\,(s,\ \chi)\ =\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}, \tag{3.1}$$

*wobei $\chi:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ ein Dirichlet-Charakter. Falls $\mathrm{Re}(s)>1$ konvergiert die Dirichletsche L-Reihe absolut, da $|\chi(n)|\leqslant 1$. Wir nennen diese holomorphe Funktion die **Dirichletsche L-Funktion** zu χ.*

Bemerkung 15. Für den Hauptcharakter gilt

$$L(s,\ \epsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\epsilon(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\zeta(s), \tag{3.2}$$

wobei ζ die Riemannsche Zetafunktion.

Wie die Zetafunktion können wir die Dirichletsche L-Reihe als unendliches Produkt darstellen.

Theorem 16. (Euler-Identität) Sei $\chi:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ ein Dirichlet-Charakter. Sei $s\in\mathbb{C}$ und $\delta>0$. Falls $\mathrm{Re}(s)\geqslant 1+\delta$, so konvergiert die Reihe $L(s,\ \chi)$ absolut und gleichmässig. Des Weiteren ist die Abbildung $s\mapsto L(s,\ \chi)$ auf $\big\{s\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(s)>1\big\}$ holomorph. Es gilt folgende Produktdarstellung:

$$L(s,\ \chi)=\prod_{\text{p ist Primzahl}}\frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}. \tag{3.3}$$

Bemerkung 17. Für den Hauptcharakter erhalten wir diesselbe Produktdarstellung wie für die Riemannsche Zetafunktion in Theorem 5:

$$L(s,\ \epsilon)=\prod_{\text{p ist Primzahl}}\frac{1}{1-\epsilon(p)p^{-s}}=\prod_{\text{p ist Primzahl}}\frac{1}{1-1\cdot p^{-s}}=\prod_{\text{p ist Primzahl}}\frac{1}{1-p^{-s}}=\zeta(s). \tag{3.4}$$

Als nächstes betrachten wir drei Beispiele von Dirichlet L-Reihen.

Beispiel 18. *(1) Für den trivialen Charakter χ_0 modulo n gilt*

$$\begin{aligned} L(s,\ \chi_0) &= \prod_{p\ \mathit{ist\ Primzahl}}\frac{1}{1-\chi_0(p)p^{-s}} = \prod_{\substack{\mathrm{ggT}(p,n)=1\\ p\ \mathit{ist\ Primzahl}}}\frac{1}{1-p^{-s}}\\ &= \prod_{\substack{p\mid n\\ p\ \mathit{ist\ Primzahl}}}\left(1-p^{-s}\right)\cdot\prod_{p\ \mathit{ist\ Primzahl}}\frac{1}{1-p^{-s}}\\ &= \prod_{\substack{p\mid n\\ p\ \mathit{ist\ Primzahl}}}\left(1-p^{-s}\right)\,\zeta(s). \end{aligned} \tag{3.5}$$

(2) Wähle $s=1$. Der einzige nichttriviale Charakter modulo 4 ist der Charakter $\chi_4=\left(\frac{-4}{n}\right)$. Wir erhalten folgende Dirichletsche L-Reihe

$$L(1,\ \chi_4)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_4(n)}{n^1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{-4}{n}\right)}{n}=\sum_{n\equiv 1 \bmod 2}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\pm\ldots\,. \tag{3.6}$$

Der Arkustangens hat folgende Reihendarstellung für ein x mit $|x|\leqslant 1$ und $x\neq\pm i$:

$$\arctan(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\pm\ldots\,. \tag{3.7}$$

Setze $x=1$, dann gilt

$$L(1,\ \chi_4)=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}. \tag{3.8}$$

(3) Wähle $s=1$. Der einzige nichttriviale Charakter modulo 6 ist der Charakter χ_6 aus Beispiel 11. Wir erhalten folgende Dirichletsche L-Reihe

$$L(1,\ \chi_6)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_6(n)}{n^1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{6n-1}+\frac{1}{6n+1}\right)=1+\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{6}-n}+\frac{1}{\frac{1}{6}+n}\right). \tag{3.9}$$

Der Kotangens hat folgende Partialbruchzerlegung für ein $x \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$:

$$\pi \cot(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+k} + \frac{1}{x-k} \right) \tag{3.10}$$

Setze $x = \frac{1}{6}$, dann gilt

$$L(1,\ \chi_6) = 1 + \frac{1}{6} \left(\pi \cot \left(\frac{\pi}{6} \right) - 6 \right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}, \tag{3.11}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $\cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$.

Das nächste Theorem besagt, wie wir die Dedekindsche Zetafunktion des Körpers $K = \mathbb{Q}(\xi_n)$, wobei ξ_n eine n-te Einheitswurzel ist, faktorisieren können.

Theorem 19. *Sei ξ_n eine n-te Einheitswurzel. Sei $K = \mathbb{Q}(\xi_n)$, dann gilt für $s \in \mathbb{C}$*

$$\zeta_K(s) = G(s) \prod_{\chi} L(s,\ \chi), \tag{3.12}$$

wobei das Produkt über alle Dirichlet-Charaktere χ modulo n geht und $G(s)$ gegeben ist durch

$$G(s) = \prod_{\substack{p|n \\ p \text{ ist Primzahl}}} \frac{1}{1 - \mathfrak{N}(p)^{-s}}. \tag{3.13}$$

Für einen Beweis von Theorem 19 siehe Kapitel VII.5 in *Algebraische Zahlentheorie* [1].

Bemerkung 20. Für den trivialen Charakter χ_0 modulo n gilt wegen dem Beispiel 18 *(1)*, dass $L(s,\ \chi_0) = \prod_{\substack{p|n \\ \text{p ist Primzahl}}} (1 - p^{-s})\ \zeta(s)$. Mittels obigem Satz folgt, dass

$$\begin{aligned} \zeta_K(s) &= G(s) \prod_{\chi} L(s,\ \chi) = G(s)\ L(s,\ \chi_0) \prod_{\chi \neq \chi_0} L(s,\ \chi) \\ &= G(s) \prod_{\substack{p|n \\ \text{p ist Primzahl}}} (1 - p^{-s})\ \zeta(s) \prod_{\chi \neq \chi_0} L(s,\ \chi), \end{aligned} \tag{3.14}$$

wobei das Produkt über alle Dirichlet-Charaktere χ modulo n geht, welche nicht der triviale Charakter sind.

Auch für einen quadratischen Zahlkörper können wir die Dedekindsche Zetafunktion wie im folgenden Theorem in Abhängigkeit der Dirichletschen L-Funktionen faktorisieren.

Theorem 21. *Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ein quadratischer Zahlkörper, dann ist die Dedekindsche Zetafunktion von der Form*

$$\zeta_K(s) = \zeta(s) L(s, \chi), \tag{3.15}$$

wobei der Dirichlet-Character χ von der Form $\chi(n) = \left(\frac{d}{n}\right)$ ist.

Als nächstes präsentieren wir die Klassenzahlformel, welche, wie der Name bereits sagt, benutzt werden kann, um die Klassenzahl eines Zahlkörpers K zu berechnen. Die Formel verwendet die Tatsache, dass die Dedekindsche Zetafunktion einen einfachen Pol bei Eins hat und wir somit an dieser Stelle das Residuum berechnen können.

Theorem 22. (Klassenzahlformel) Die Dedekindsche Zetafunktion hat einen einfachen Pol bei $s = 1$ mit Residuum

$$\operatorname*{Res}_{s=1} \zeta_K(s) = \frac{2^r (2\pi)^s}{w\sqrt{|d|}} hR, \tag{3.16}$$

wobei h die Klassenzahl, d die Diskriminante, w die Anzahl Einheitswurzeln, R der Dirichletsche Regulator, r und $2s$ die Anzahl der reellen und komplexen Einbettungen des Zahlkörpers K.

Das nächste Theorem ist ein Spezialfall der Klassenzahlformel für quadratische Körper.

Theorem 23. **(Dirichletsche Klassenzahlformel)** Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ eine quadratische Zahlkörper, dann gilt

$$h = \begin{cases} \frac{w\sqrt{|d|}}{2\pi} L(1,\ \chi) & \text{falls } d < 0 \\ \frac{\sqrt{d}}{\ln \epsilon} L(1,\ \chi) & \text{falls } d > 0, \end{cases} \tag{3.17}$$

wobei h die Klasenzahl, w die Anzahl Einheitswurzeln und ϵ gegeben ist durch

$$\epsilon = \frac{1}{2}(t + u\sqrt{d}). \tag{3.18}$$

Hier sind t, u die Fundamentaleinheit der Pell Gleichung.

Bemerkung 24. Der Körper K hat Klassenzahl $h = 1$ genau dann, wenn $\mathcal{O}_K$ ein Haupitdeal ist. Des Weiteren existieren nur neun imaginär-quadratische Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ die Klassenzahl $h = 1$ besitzen. Diese neun Werte sind:

$$d = -1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163. \tag{3.19}$$

Es wird vermutet, dass unendlich viele reell-quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ die Klassenzahl $h = 1$ besitzen.

Wir betrachten nun zwei Beispiele einer Dedekindschen Zetafunktion und überprüfen damit die Korrektheit der Dirichletschen Klassenzahlformel.

Beispiel 25. *(1) Sei $K = \mathbb{Q}(i)$. Dann gilt, $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[i]$ und die Dedekindsche Zetafunktion sieht folgendermassen aus:*

$$\zeta_{\mathbb{Q}(i)}(s) = \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathbb{Z}[i]} \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s} = \prod_{\mathfrak{p} \subset \mathbb{Z}[i]} \frac{1}{1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-s}}. \tag{3.20}$$

Vom Theorem 1.32 aus dem ersten Vortrag wissen wir, dass wir bis auf Assoziiertheit folgende Primideale in $\mathbb{Z}[i]$ haben:

- $1 + i$, *wobei* $\mathfrak{N}(1 + i) = 1^2 + 1^2 = 2$.
- $a + ib$, *wobei* $a > |b| > 0$, $a^2 + b^2 = p \in \mathbb{Z}$ *eine Primzahl mit* $p \equiv 1 \bmod 4$, *und* $\mathfrak{N}(a + ib) = a^2 + b^2 = p$.
- p, *wobei* $p \in \mathbb{Z}$ *Primzahl mit* $p \equiv 3 \bmod 4$ *und* $\mathfrak{N}(p) = p^2$.

Somit gilt

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathbb{Q}(i)}(s) &= \left(1 - 2^{-s}\right)^{-1} \cdot \prod_{\substack{p \in \mathbb{Z} \ \textit{Primzahl} \\ p \equiv 3 \bmod 4}} \left(1 - (p^2)^{-s}\right)^{-1} \cdot \prod_{\substack{p \in \mathbb{Z} \ \textit{Primzahl} \\ p \equiv 1 \bmod 4}} \left(1 - p^{-s}\right)^{-2} \\ &= \left(1 - 2^{-s}\right)^{-1} \cdot \prod_{\substack{p \in \mathbb{Z} \ \textit{Primzahl} \\ p \equiv 3 \bmod 4}} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1} \cdot \prod_{\substack{p \in \mathbb{Z} \ \textit{Primzahl} \\ p \equiv 1 \bmod 4}} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1} \\ &\quad \cdot \prod_{\substack{p \in \mathbb{Z} \ \textit{Primzahl} \\ p \equiv 3 \bmod 4}} \left(1 + p^{-s}\right)^{-1} \cdot \prod_{\substack{p \in \mathbb{Z} \ \textit{Primzahl} \\ p \equiv 1 \bmod 4}} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1} \\ &= \zeta(s) \cdot \prod_{p \ \textit{ist Primzahl}} \left(1 - \chi_4(p) p^{-s}\right)^{-1} \\ &= \zeta(s) \cdot L(s,\ \chi_4), \end{aligned} \tag{3.21}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Definition der Riemannschen Zetafunktion und im letzten Schritt die Produktdarstellung 16 der L-Funktion benutzen. Wir haben somit Theorem 21 überprüft.

Als nächstes wollen wir die Dirichletsche Klassenzahlformel überprüfen. Aufgrund der Bemerkung 24 und da $\mathbb{Z}[i]$ ein Hauptidealring ist, folgt, dass $\mathbb{Q}(i)$ Klassenzahl 1 hat.

Für $\mathbb{Q}(i)$ ist die Diskriminante $d = -4$, die Anzahl Einheiten $w = 4$ und aus Beispiel 18 (2) wissen wir, dass $L(1,\ \chi_4) = \frac{\pi}{4}$. Es gilt, da $d < 0$, dass

$$h = \frac{w\sqrt{|d|}}{2\pi} L(1,\ \chi_4) = \frac{4\sqrt{|-4|}}{2\pi}\frac{\pi}{4} = 1. \tag{3.22}$$

(2) Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Dann erhält man analog zu (1)

$$\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(s) \;=\; \zeta(s) \cdot L(s,\ \chi_3). \tag{3.23}$$

Da der Führer von χ_6 3 ist, können wir χ_6 schreiben als $\chi_6 = \chi_3 \circ \psi$, wobei

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^\times &\to (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times \\ \bar{1} &\mapsto \bar{1}, \\ \bar{5} &\mapsto \bar{2}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Daher gilt,

$$L(s,\ \chi_3) = \left(1 + \frac{1}{2^s}\right)^{-1} L(s, \chi_6). \tag{3.25}$$

Wegen (3.11) *gilt, dass*

$$L(1,\ \chi_3) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{-1} L(1, \chi_6) = \frac{2}{3}\frac{\pi\sqrt{3}}{6} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}. \tag{3.26}$$

Wir können nun wieder den Dirichletschen Primzahlsatz überprüfen. Da $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})} = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}]$ ein Hauptideal ist, gilt wieder aufgrund der Bemerkung 24, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ Klassenzahl 1 besitzt.

Für $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ ist die Diskriminante $d = -12$ und die Anzahl Einheiten $w = 3$. Es gilt, da $d < 0$, dass

$$h = \frac{w\sqrt{|d|}}{2\pi} L(1,\ \chi_6) = \frac{3\sqrt{|-12|}}{2\pi}\frac{\pi\sqrt{3}}{9} = 1. \tag{3.27}$$

4. Dichtigkeitssätze

Zunächst führen wir zwei Definitionen ein, die die Dichte einer Menge beschreiben. Diese benötigen wir dann um zwei wichtige Dichtigkeitssätze zu erklären.

Definition 26. *Sei K ein Zahlkörper und M eine Menge von Primidealen von K. Dann heisst*

$$d(M) = \lim_{s \to 1^+} \frac{\sum_{\mathfrak{p} \in M} \mathfrak{N}(p)^{-s}}{\sum_{\mathfrak{p}} \mathfrak{N}(p)^{-s}} \tag{4.1}$$

*die **Dirichlet-Dichtigkeit** von M, falls der Limes existiert.*

Bemerkung 27. Die Dirichlet-Dichtigkeit nimmt einen Wert zwischen Null und Eins an, somit $0 \leqslant d(M) \leqslant 1$. Ausserdem beträgt die Dirichlet-Dichtigkeit von der Menge aller Primzahlen Eins. Jedoch ist diese nicht für jede Teilmenge der Primzahlen definiert. Eine endliche Menge an Primzahlen hat Dirichlet-Dichtigkeit Null. Falls sich zwei Mengen von Primzahlen nur um endlich viele Zahlen unterscheiden, so besitzen sie diesselbe Dirichlet-Dichtigkeit.

Wir können die Dichtigkeit einer Menge aber auch anders beschreiben.

Definition 28. *Sei K ein Zahlkörper und M eine Menge von Primidealen von K. Dann heisst*

$$\delta(M) = \lim_{x \to \infty} \frac{\left|\{\mathfrak{p} \in M \mid \mathfrak{N}(\mathfrak{p}) \leqslant x\}\right|}{\left|\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{N}(\mathfrak{p}) \leqslant x\}\right|} \tag{4.2}$$

*die **natürliche Dichtigkeit** von M, falls der Limes existiert.*

Bemerkung 29. Der Begriff *natürliche Dichtigkeit* kommt daher, dass die Dichte "natürlich", beziehungsweise intuitiv definiert ist. Zum Beispiel ist die natürliche Dichtigkeit der geraden Zahlen $\frac{1}{2}$.

Falls $\delta(M)$ existiert, so existiert auch $d(M)$ und es gilt, dass $\delta(M) = d(M)$. Dahingegen impliziert die Existenz von $d(M)$ nicht die Existenz von $\delta(M)$.

Wir benutzen die Dirichletsche L-Reihe und die oben definierten Dichtigkeiten für zwei wichtige Dichtigkeitssätze. Der erste Satz, den wir erläutern werden, ist Chebotarev's Dichtigkeitssatz, benannt nach dem sowjetischen Mathematiker NIKOLAI GRIGORIEVICH CHEBOTAREV. Der Satz ist von Bedeutung, da er besagt, dass die Dichte der Menge aller unverzweigten Primideale endlich ist und existiert, und da aus ihm folgt, dass eine galloissche Erweiterung durch die Menge aller unverzweigten Primideale endeutig bestimmt ist.

Theorem 30. (Chebotarev's Dichtigkeitssatz). Sei L eine endliche galoissche Erweiterung über dem Körper K mit der Gruppe G. Sei $\mathfrak{p}$ ein unverzwigtes Primideal von L. Sei $C \subset G$ Konjugationsinvariant. Des Weiteren sei die Menge aller unverzweigten Primideale von K gegeben durch

$$A_C = \Big\{\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K \mid \mathfrak{p} \text{ unverzweigt in } L \text{ und } \left(\frac{L/K}{\mathfrak{P}}\right) \in C \text{ für ein Primideal über } \mathfrak{p}\Big\}, \tag{4.3}$$

wobei $\left(\frac{L/K}{\mathfrak{P}}\right)$ der Frobeniusautomotphismus von $\mathfrak{P}$ über K. Dann hat die Menge A_C die natürliche Dichtigkeit

$$\delta(A_C) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left|\{\mathfrak{p} \in A_C \mid \mathfrak{N}(\mathfrak{p}) \leqslant x\}\right|}{\left|\{\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K \mid \mathfrak{N}(\mathfrak{p}) \leqslant x\}\right|} = \frac{|C|}{|G|}. \tag{4.4}$$

Für den Beweis von Theorem 30 siehe Kapitel VII.13 in *Algebraische Zahlentheorie* [1].

Als nächstes formulieren wir den Chebotarev's Dichtigkeitssatz für eine Körpererwiterung über $\mathbb{Q}$. Sei also L eine endliche Galoissche Erweiterung über dem Körper $K = \mathbb{Q}$. Sei $G = L/\mathbb{Q}$ die dazugehörende Galoisgruppe. Sei $C \subset G$ Konjugationsinvariant. Des Weiteren sei die Menge aller unverzweigten Primideale von $\mathbb{Q}$ gegeben durch

$$A_C = \Big\{(p) \subset \mathbb{Z} \mid (p) \text{ unverzweigt in } L \text{ und } \left(\frac{L/\mathbb{Q}}{\mathfrak{P}}\right) \in C \text{ für ein Primideal über } (p)\Big\}, \tag{4.5}$$

wobei $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{\mathfrak{P}}\right)$ der Frobeniusautomotphismus von $\mathfrak{P}$ über $\mathbb{Q}$. Dann hat die Menge A_C die natürliche Dichtigkeit

$$\delta(A_C) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left|\{(p) \in A_C \mid \mathfrak{N}(p) \leqslant x\}\right|}{\left|\{(p) \subset \mathbb{Z} \mid \mathfrak{N}(p) \leqslant x\}\right|} = \frac{|C|}{|G|}. \tag{4.6}$$

Der zweite Dichtigkeitssatz ist der Dirichletsche Primzahlsatz. Dieser besagt, dass eine arithmetische Folge

$$a, a+n, a+2n, a+3n, ... \tag{4.7}$$

immer unendlich viele Primzahlen enthält, das heisst, dass unendlich viele Primzahlen kongruent zu a modulo n existieren.

Theorem 31. (Dirichletscher Primzahlsatz). Seien $a \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Dann existieren unendlich viele Primzahlen die kongurent zu a modulo n sind. Die Menge der Primzahlen, die kongurent zu a modulo n sind, besitzen die natürliche Dichte $\delta(\{p \text{ ist Primzahl} \mid p \equiv a \bmod n\}) = \frac{1}{\varphi(n)}$, wobei $\varphi(n) = |\{b \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant b \leqslant n \text{ und } \operatorname{ggT}(b,n) = 1\}|$ die Eulersche Phi-Funktion ist.

Da Chebotarev's Dichtigkeitssatz eine Verallgemeinerung des Dirichletschen Primzahlsatzes ist, werden wir ihn verwenden, um den Primzahlsatz zu beweisen.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $L = \mathbb{Q}(\xi_n)$ eine endliche galoissche Erweiterung über dem Körper $K = \mathbb{Q}$, wobei ξ_n eine primitive n-te Einheitswurzel ist. Die Galoisgruppe $G = L/K$ ist isomorph zu den invertierbaren Elementen von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, da

$$\begin{aligned} G &\to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \\ (\xi_n \mapsto \xi_n^a) &\mapsto (a \bmod n). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Da die Menge der verzweigten Primideale endlich ist und diese somit nicht zu der Dichte beitragen, betrachten wir nur unverzweigte Primideale.

Sei also $\mathfrak{P}$ ein unverzweigtes Primideal über einem Primideal (p), wobei $p \nmid n$. Aus der Vorlesung über den lokalen Frobenius, wissen wir, dass dieser gegeben ist durch

$$\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{\mathfrak{P}}\right)\xi_n = \xi_n^p. \tag{4.9}$$

Wegen dem Isomorphismus (4.8) folgt, dass

$$\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{\mathfrak{P}}\right) \equiv p \bmod n. \tag{4.10}$$

Da G abelsch ist, hat jede Konjugationsklasse genau ein Element. Sei also $C = \{a\}$ die Konjugationsklasse von a, dann gilt $|C| = 1$. Sei die Menge aller unverzweigten Primideale von $\mathbb{Q}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} A_C &= \left\{(p) \subset \mathbb{Z} \mid (p) \text{ unverzweigt in } L \text{ und } \left(\frac{L/\mathbb{Q}}{\mathfrak{P}}\right) \in C \text{ für ein Primideal über } (p)\right\} \\ &= \{p \equiv a \bmod n\}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

wobei die letzte Äquivalenz aus (4.10) folgt.

Wir wenden nun den Chebotarev's Dichtigkeitssatz in der Form (4.6) an.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|\{p \equiv a \bmod n \mid p \leqslant x\}|}{|\{p \leqslant x\}|} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left|\{(p) \in A_C \mid \mathfrak{N}(p) \leqslant x\}\right|}{\left|\{(p) \subset \mathbb{Z} \mid \mathfrak{N}(p) \leqslant x\}\right|} = \frac{|C|}{|G|} = \frac{1}{|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|} = \frac{1}{\varphi(n)} \tag{4.12}$$

Im vorletzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass es in jeder Konjugationsklasse genau ein Element hat und, dass G isomorph zu $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ ist.

Definiere nun folgende Äquivalenzrelation:

$$f(x) \sim g(x) \iff \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \tag{4.13}$$

Aus (4.12) folgt nun, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|\{p \equiv a \bmod n \mid p \leqslant x\}|}{|\{p \leqslant x\}| \cdot \frac{1}{\varphi(n)}} = 1. \tag{4.14}$$

Folglich gilt, dass $|\{p \equiv a \bmod n \mid p \leqslant x\}| \sim |\{p \leqslant x\}| \cdot \frac{1}{\varphi(n)}$. Da unendlich viele Primzahlen existieren, konvergiert die rechte Seite gegen unendlich, somit auch die Linke. Wir erhalten also, dass unendlich viele Primzahlen existieren, welche kongurent zu $a \bmod n$ sind. □

Für einen alternativen Beweis siehe Kapitel 8.6 in *Einführung in die algebraische Zahlentheorie* [2]. Der Beweis verwendet die Tatsache, dass der Wert der Dirichletsche L-Funktion eines Dirichlet-Charakters modulo n an der Stelle $s = 1$ nicht Null ist.

References

[1] J. Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*. Springer-Verlag, Berlin, 1992
[2] A. Schmidt, *Einführung in die algebraische Zahlentheorie*. Springer, Berlin, 2007

Email address: `imhofl@student.ethz.ch`